Αριθμητική Ανάλυση   No. 1   Date 27/11/2019

Jacobi: $x_i^{(m+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)}\right) / a_{ii}$, $i = 0, 1, \dots$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Gauss-Seidel: $x_i^{(m+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)}\right) / a_{ii}$

Παράδειγμα: Να γίνουν 3 επαναλήψεις των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned} \quad , \text{ με } x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jacobi:

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left(1 + x_2^{(m)}\right)$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left(x_1^{(m)} + x_3^{(m)}\right)$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left(1 + x_2^{(m)}\right)$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

$$x = (1\ 1\ 1)^T$$

Gauss-Seidel:

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left(1 + x_2^{(m)}\right)$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left(x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)}\right)$$

$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left(1 + x_2^{(m+1)}\right)$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 5/8 \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 5/8 \\ 13/16 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 13/16 \\ 13/16 \\ 29/32 \end{pmatrix}$$

Jacobi: $\|x^{(3)}-x\|_\infty = \frac{1}{2}$

Gauss-Seidel: $\|x^{(3)}-x\| = \frac{3}{16} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

- Φαίνεται ότι συγκλίνει γρηγορότερα η Gauss-Seidel.

→ Πρέπει να βρούμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύγκλισης μιας μεθόδου και σύγκρισης δύο μεθόδων.

Θεωρούμε το διαχωρισμό: $A = D - L - U$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi:

$$Dx^{(m+1)} = b + (L+U)x^{(m)}$$

$$\Leftrightarrow x^{(m+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1}b = G_J x^{(m)} + c_J$$

Gauss-Seidel:

$$(D-L)x^{(m+1)} = b + Ux^{(m)} \Leftrightarrow x^{(m+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(m)} + (D-L)^{-1}b =$$

$$= G_{GS}x^{(m)} + c_{GS}$$

Οι πίνακες $G_J = D^{-1}(L+U)$ κ' $G_{GS} = (D-L)^{-1}U$ λέγονται επαναληπτικοί πίνακες των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel αντίστοιχα.

- Παρατηρούμε ότι η Jacobi και Gauss-Seidel είναι ειδικές περιπτώσεις μιας κατηγορίας μεθόδων που βασίζονται στο διαχωρισμό $A=M-N$, όπου M αντιστρέψιμος.

$$Mx^{(m+1)} = b + Nx^{(m)}, \quad m=0,1,\dots \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow x^{(m+1)} = \underbrace{M^{-1}N}_{G}x^{(m)} + \underbrace{M^{-1}b}_{C} = Gx^{(m)} + C$$

Για $M=D$ κ' $N=L+U$ παίρνουμε την Jacobi

για $M=D-L$ κ' $N=U$ -II- -II- Gauss-Seidel

Αν συγκλίνει, θα συγκλίνει στη λύση το διότι η $x=M^{-1}Nx+C$ προκύπτει ισοδύναμα από το $Ax=b$.

$$Ax=b \Leftrightarrow (M-N)x=b \Leftrightarrow Mx=Nx+b \Leftrightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$$

Αφαιρώντας κατά μέλη έχουμε:

$$x^{(m+1)} - x = G(x^{(m)} - x)$$

Επαγωγικά: $x^{(m)} - x = G^m(x_0 - x)$

Θεωρούμε μια διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$ και την αντίστοιχη φυσική τότε $\|x^{(m)} - x\| \le \|G^m\| \cdot \|x^{(0)} - x\|$. Για να συγκλίνει η μέθοδος πρέπει:

$$\lim_{m\to\infty} G^m = 0 \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty}\|G^m\| = 0$$

Θεώρημα: Έστω x η λύση του συστ. $Ax=b$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Η επαναληπτική μέθοδος βασισμένη στο διαχωρισμό $A=M-N$ συγκλίνει.

(β) $\rho(G)<1$, όπου G ο επαναληπτικός πίνακας $G=(M^{-1}N$

(γ) Υπάρχει φυσική $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|G\|<1$.

(δ) $\lim_{m\to\infty} G^m = 0$

Αν G και F είναι επαναληπτικοί πίνακες δύο μεθόδων τότε αν $\rho(G)<\rho(F)$, η επαναληπτική μέθοδος της G συγκλίνει ταχύτερα από εκείνη της F.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

- $G_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$\|G_J\|_1 = \|G_J\|_\infty = 1.$

$$\det(G_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4}\lambda = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow P(G_J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. Επομένως συγκλίνει.

- $G_{GS} = (D-L)^{-1} U$

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ -1 & 2 & \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[(D-L)^{-1}\right]^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (D-L)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ 1/4 & 1/2 & \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$G_{GS} = (D-L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ 1/4 & 1/2 & \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\det(G_{GS} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4-\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/8 & 1/4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left[\left(\frac{1}{4} - \lambda\right)^2 - \frac{1}{16}\right] = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda\right) = \lambda^2\left(\lambda - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \ \lambda_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow P(G_{GS}) = \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} = P(G_J) < 1$

$P(G_{GS}) = P(G_J)^2$: Η G-S συγκλίνει με διπλάσια ταχύτητα από την Jacobi.